SUR UNE CONJECTURE DE GANDHI CONCERNANT LES NOMBRES DE GENOCCHI

Dominique DUMONT

Département de Mathématiques de la Faculté des Lettres de Besançon, Besançon, France

Reçu le 3 mai 1971

Dans un article récent [1], Gandhi a formulé une conjecture concernant les nombres de Genocchi. Cette suite (G_n) d'entiers est définie par la relation de récurrence suivante, dans les notations symboliques usuelles ($G^i \equiv G_i$):

$$G_1 = 1$$

et, pour $n \geqslant 2$,

$$(G+1)^n + G_n = 1 \, .$$

De façon équivalente, les G_n sont définis par la fonction génératrice

$$\frac{2t}{e^t+1} = t + \sum_{n \geqslant 1} \frac{G_{2n}}{(2n)!} t^{2n} \, ,$$

et sont reliés aux nombres de Bernouilli par l'identité

$$G_{2n} = 2(1-2^{2n})B_{2n} \, .$$

Les premières valeurs des nombres de Genocchi sont

$$G_2 = -1,\quad G_4 = +1,\quad G_6 = 3,\quad G_8 = +17,\quad G_{10} = -155,\quad \text{etc.}$$

Suivant des auteurs antérieurs [2], Gandhi introduit l'expression

$$A_n(k) = \sum k^2 \sum (k+1)^2 \ldots \sum (k+n-1)^2\ ,\qquad k, n \in \mathbb{N}\ .$$

De fait, il est plus simple de partir de la récurrence définissant cette expression, à savoir

$$(1)\qquad \begin{cases} A_n(X) = X^2 A_{n-1}(X+1) - (X-1)^2 A_{n-1}(X)\ , \\ A_0(X) = 1\ . \end{cases}$$

Cette récurrence implique que les $A_n(X)$ sont des polynomes en X de degré au plus égal à n.

La conjecture de Gandhi est:

$$(2)\qquad G_{2n} = (-1)^n A_{n-1}(1)\ .$$

Notre but est de montrer que cette conjecture est équivalente à la conjecture:

(2') La valeur absolue du nombre de Genocchi, $|G_{2n}|$, est égale à la somme des coefficients des monômes complets dans le développement de $(X_1(X_1+X_2)(X_1+X_2+X_3)\ldots(X_1+X_2+\ldots+X_{n-1}))^2$. (Un monôme complet étant un monôme dans lequel chaque lettre X_i apparaît avec une puissance non nulle).

Pour cela, nous commençons par remplacer les $A_n(X)$ par des polynomes ayant l'avantage que leurs coefficients sont des entiers non négatifs dont nous pouvons donner une interprétation combinatoire. Posons en effet

$$B_n(X) = X^2 A_{n-1}(X+1)$$

et

$$B_n(X) = \sum_{k>0} B_{n,k} X^k\ .$$

La récurrence (1) devient alors

$$(3) \qquad \begin{cases} B_n(X) = X^2(B_{n-1}(X+1) - B_{n-1}(X)) , \\ B_1(X) = X^2 . \end{cases}$$

En identifiant dans (3) les coefficients de X^k, on obtient

$$(4) \qquad B_{n,k} = \binom{k-1}{k-2} B_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} B_{n-1,k} + \dots$$

$$+ \binom{n}{k-2} B_{n-1,n} , \qquad k \geqslant 2$$

Nous déduisons de (4) quelques propriétés purement algébriques des nombres $B_{n,k}$:

(i) Soit $n \geqslant 1$. Si $k < 2$, $B_{n,k} = 0$ (cela découle de (3)). Si $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $B_{n,k}$ est entier strictement positif. Si $k > n+1$, $B_{n,k} = 0$. Pour $n = 1$, ces deux dernières propriétés sont vraies ($B_{1,2} = 1$). Or, si elles sont vraies pour $n-1$, elles le sont pour n d'après (4). Elles sont donc vraies pour tout n.

(ii) $B_{n,k}$ est un multiple de $(k-1)!$, $k \geqslant 2$. En effet, (4) s'écrit encore

$$B_{n,k} = (k-1) B_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2} B_{n-1,k} + \dots .$$

Si la propriété est vraie pour $n-1$, $B_{n-1,k-1}$ est multiple de $(k-2)!$ et, pour $i \geqslant k$, $B_{n-1,i}$ est multiple de $(i-1)!$, donc de $(k-1)!$. Ainsi, $B_{n,k}$ est multiple the $(k-1)!$ pour tout k: la propriété est vraie pour n. Or elle est vraie pour $n = 1$, donc pour tout n.

(iii) En itérant la récurrence (4), on obtient pour $n \geqslant 2$,

$$B_{n,k} = \sum \binom{2}{k_1} \binom{4-k_1}{k_2-k_1} \binom{6-k_2}{k_3-k_2} \cdots \binom{2(n-1)-k_{n-2}}{k_{n-1}-k_{n-2}} ,$$

formule où la sommation est étendue à toutes les suites $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ telles que $1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2} < k_{n-1} = 2n-k$ et, pour tout j, $k_j \leqslant 2j$. En effet, supposons la formule vraie pour n et pour tout k. On a

$$B_{n+1,k} = \sum_{k-1 \leqslant i \leqslant n+1} \binom{i}{k-2} B_{n,i}$$

$$= \sum_{k-1 \leqslant i \leqslant n+1} \binom{i}{i-k+2} \sum \binom{2}{k_1}\binom{4-k_1}{k_2-k_1} \cdots \binom{2(n-1)-k_{n-2}}{k_{n-1}-k_{n-2}}$$

Posons $k_n = 2n+2-k$. Dans ces conditions, on a bien $\ldots < k_{n-1} = 2n-i < k_n = 2(n+1)-k$ et, pour tout j, $k_j \leqslant 2j$; $i = 2n-k_{n-1}$ et $i-k+2 = 2n-k_{n-1}-k+2 = k_n - k_{n-1}$. D'où

$$B_{n+1,k} = \sum \binom{2}{k_1}\binom{4-k_1}{k_2-k_1} \cdots \binom{2n-k_{n-1}}{k_n-k_{n-1}} .$$

La formule est donc vraie pour $n+1$ et pour tout k. En outre, pour $n=2$, on a bien $B_{2,2} = \binom{2}{2}$ et $B_{2,3} = \binom{2}{1}$. Par conséquent, la formule est démontrée par récurrence sur n.

Tableau 1
Les valeurs de $B_{n,k}$ pour $n = 1, \ldots, 5$ et $k = 2, \ldots, 6$

$n \backslash k$	2	3	4	5	6
1	1				
2	1	2			
3	3	8	6		
4	17	54	60	24	
5	155	556	762	480	120

Donnons dans le tableau 1 les premières valeurs des $B_{n,k}$ $(k \geqslant 2)$, calculées avec (4). Nous en venons maintenant à une interprétation combinatoire très simple des entiers $B_{n,k}$. n étant un entier strictement positif, nous notons comme d'usage $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et adoptons de surcroît la notation $[-n] = \{-1, -2, -3, \ldots, -n\}$.

Définition. Soient n et k des entiers strictement positifs. Nous appelons $\Phi_{n,k}$ l'ensemble des applications *surjectives* ϕ: $[-n] \cup [n] \to [n]$ ayant les propriétés suivantes:

ϕ est *dominée par la valeur absolue*, en ce sens que

$$m \in [-n] \cup [n] \Rightarrow m\phi \leqslant |m| ,$$

$card(1\phi^{-1}) = k.$

En outre, nous posons $\Phi_n = \bigcup_k \Phi_{n,k}$.

Théorème. $B_{n,k} = card(\Phi_{n,k})$.

Démonstration. Notre objectif est de prouver que les entiers card$(\Phi_{n,k})$ satisfont la relation de récurrence (4).

Nous notons i_1 l'application $[-(n-1)] \cup [n-1] \to [-n] \cup [n]$ définie par: $m \in [-(n-1)] \Rightarrow mi_1 = m-1$, et $m \in [n-1] \Rightarrow mi_1 = m+1$; et s_1 l'application $[n] \to [n-1]$ définie par $ms_1 = \max(1, m-1)$. Cela étant, pour ϕ élément de Φ_n, nous posons $\hat{\phi} = i_1 \phi s_1$:

$$\begin{array}{ccc}
[-n] \cup [n] & \xrightarrow{\ \phi\ } & [n] \\
\uparrow i_1 & & \downarrow s_1 \\
[-(n-1)] \cup [n-1] & \xrightarrow[\hat{\phi}]{} & [n-1]
\end{array}$$

Il est clair sur cette construction que $\hat{\phi}$ est surjective et dominée par la valeur absolue, autrement dit, $\phi \to \hat{\phi}$ est une application de Φ_n dans Φ_{n-1}. En outre, nous avons le résultat suivant:

Lemme. *L'application i_1, restreinte à $1\hat{\phi}^{-1}$, applique bijectivement cet ensemble sur $(2\phi^{-1}) \cup ((1\phi^{-1}) - \{-1, +1\})$.*

Démonstration. En effet, soit m un élément de $1\hat{\phi}^{-1}$, et considérons mi_1 : $(mi_1)\phi = 1$ ou 2, car $(mi_1\phi)s_1 = m\hat{\phi} = 1$. De plus, $mi_1 \neq -1$ et $mi_1 \neq 1$ d'après la définition de i_1. Inversement, soit $m' \in (2\phi^{-1}) \cup ((1\phi^{-1}) - \{-1, +1\})$. Il existe un m et un seul tel que $m' = mi_1$. Puisque $m'\phi = 1$ ou 2, $m'\phi s_1 = 1$, autrement dit, $m\hat{\phi} = (mi_1)\phi s_1 = 1$ et m appartient à $1\hat{\phi}^{-1}$.

De ce lemme, nous déduisons

(i) que si card$(1\phi^{-1}) = k$, alors card$(1\hat{\phi}^{-1}) \geqslant k-1$ (car card$(2\phi^{-1}) \geqslant 0$),

(ii) qu'inversement, si ψ appartient à $\Phi_{n-1,i}$, avec $k-1 \leqslant i \leqslant n$, il existe exactement $\binom{i}{k-2}$ éléments ϕ de $\Phi_{n,k}$ tels que $\hat{\phi} = \psi$.

Pour prouver cela, nous établissons une bijection entre ces éléments et les parties de $1\,\psi^{-1}$ de cardinal $k-2$: Soit ϕ un élément de $\Phi_{n,k}$ tel que $\hat{\phi} = \psi$. D'après le lemme, il existe une partie et une seule L de $1\,\psi^{-1}$ telle que $L\,i_1 = (1\,\phi^{-1}) - \{-1,+1\}$ et on a $\mathrm{card}(L) = \mathrm{card}(1\,\phi^{-1}) - 2 = k-2$. Inversement, soit L une partie de $1\,\psi^{-1}$ de cardinal $k-2$. Posons $K = L\,i_1 \cup \{-1,+1\}$ et définissons ϕ de la manière suivante: pour $m' \in K$, $m'\phi = 1$; pour $m' \in ([-n] \cup [n]) - K$, il existe un m tel que $m\,i_1 = m'$, et on prend $m'\phi = m\psi + 1$. On vérifie immédiatement que ϕ appartient à $\Phi_{n,k}$ et que $\hat{\phi} = \psi$.

De (i) et (ii), on tire l'égalité

$$(4') \qquad \mathrm{card}(\Phi_{n,k}) = \sum_{k-1 \leqslant i \leqslant n} \binom{i}{k-2} \mathrm{card}(\Phi_{n-1,i}) .$$

Au départ de la récurrence, on a bien $\mathrm{card}(\Phi_{1,2}) = 1 = B_{1,2}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire. $B_{n,2} = \mathrm{card}(\Phi_{n-1})$.

Démonstration. En effet,

$$B_{n,2} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant n} B_{n-1,i} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{card}(\Phi_{n-1,i}) = \mathrm{card}(\Phi_{n-1}).$$

Venons-en au but de cette note, l'équivalence des conjectures (2) et (2'). Considérons le développement suivant, dans lequel $X_{-i} \equiv X_i$:

$$X_{-1}(X_{-1}+X_{-2}) \dots (X_{-1}+X_{-2}+ \dots + X_{-(n-1)})$$
$$\times X_1(X_1+X_2) \dots (X_1+X_2+ \dots + X_{n-1})$$
$$= \sum_{\phi} X_{(-1)\phi} X_{(-2)\phi} \dots X_{(-(n-1))\phi} X_{1\phi} X_{2\phi} \dots X_{(n-1)\phi} ,$$

formule où la sommation est effectuée sur l'ensemble des applications $\phi: [-(n-1)] \cup [n-1] \to [n-1]$ dominées par la valeur absolue. Un monôme complet apparaît dans la sommation chaque fois que ϕ est surjective. Par conséquent, la somme des coefficients des monômes complets est égale au nombre des applications ϕ surjectives, c'est-à-dire à card(Φ_{n-1}). Or on a card$(\Phi_{n-1}) = B_{n,2} = A_{n-1}(1)$, la seconde égalité découlant de la définition des polynomes B_n.

Finalement, la conjecture de Gandhi

$$(2) \qquad G_{2n} = (-1)^n A_{n-1}(1)$$

est équivalente à la conjecture

$$(2') \qquad |G_{2n}| = \mathrm{card}(\Phi_{n-1}).$$

Références

[1] J.M. Gandhi, A conjectured representation of Genocchi numbers, Am. Math. Monthly 77 (1970) 505–506.

[2] C. Krishnamachary and M. Bhimasena Rao, On a table for calculating Eulerian numbers based on a new method, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 Vol. 22 (1921) 73–80.

[3] A. Lucas, Théorie des nombres, Vol. 1 (Gauthier Villars, Paris, 1891).